SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. OBRECHT

ALCUNI RISULTATI DI PERTURBAZIONE PER OPERATORI COSENO

Bologna, 12 APRILE 1984

In questo seminario intendo esporre alcuni risultati recenti sulle perturabazioni dell'equazione

(1) $u'' = Au$

in uno spazio di Banach per le quali il problema di Cauchy rimane ben posto se lo era per la (1).

E' stato provato da Fattorini (1968) che il problema di Cauchy per l'equazione (1) è ben posto se, e solo se, l'operatore lineare A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta fortemente continua.

Pertanto richiamerò brevemente alcuni risultati sulle funzioni coseno, prima di esporre i risultati di perturbazione.

In tutta l'esposizione indicherò con X uno spazio di Banach complesso.

1. ALCUNI RICHIAMI SULLE FUNZIONI COSENO ASTRATTE

Una funzione $C: R \to L(X)$ viene detta funzione coseno astratta se è soluzione dell'equazione funzionale

(2) $C(t + s) + C(t - s) = 2\, C(t)C(s), \ \forall\, t, s \in R.$

Dall'equazione funzionale (2) segue che la forte continuità in un punto implica la forte continuità su tutto R . Nel seguito, anche se non esplicitamente specificato, considereremo solo funzioni coseno fortemente continue.

Vediamo ora alcuni esempi tipici di funzioni coseno.

Esempio 1. Siano $X = C$, $\alpha \in C$. Allora le funzioni

$$t \to \cos(\alpha t) \quad , \quad t \to \cosh(\alpha t),$$

sono funzioni coseno.

Esempio 2. Sia $A \in L(X)$. Allora le funzioni

$$t \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} A^k,$$

$$t \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$$

sono funzioni coseno.

Esempio 3. Sia $\{T(t);\ t \in R\}$ un gruppo fortemente continuo di operatori in $L(X)$. Allora,

$$(3) \qquad t \to C(t) = \frac{1}{2}(T(t) + T(-t))$$

è una funzione coseno in X.

N.B. Non tutte le funzioni coseno ammettono la rappresentazione esponenziale (3) (si veda Kisyński (1971)).

Un caso particolare del precedente e a cui faremo spesso riferimento nel seguito è il seguente.

Esempio 4. (funzione coseno di d'Alembert).

La funzione $t \to C(t)$, dove

$$(C(t)f)(x) = \frac{1}{2}(f(t+x) + f(t-x)) \tag{4}$$

è una funzione coseno su molti spazi ragionevoli; per esempio scegliendo come X

$X_1 = L^p(I)$, dove I è un intervallo di R,

$X_2 = \{f \in C(R);\ f \text{ è limitata}\}$,

$X_3 = \{f \in C([a,b]);\ f(a) = f(b) = 0\}$,

normati nel modo usuale. Naturalmente, per dare significato alla (4) dovremo pensare le funzioni prolungate con lo zero fuori dell'intervallo nel quale sono definite.

Viene detta funzione seno associata a C la funzione

$$S: R \to L(X),$$

$$S(t)x = \int_0^t C(\tau)x\,d\tau \quad , \quad x \in X.$$

La funzione seno associata alla (4) è ovviamente

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(s)ds.$$

Analogamente al caso dei semigruppi, anche le funzioni coseno sono individuate da un generatore infinitesimale. Più precisamente, viene detto generatore infinitesimale della funzione coseno C l'operato-

re definito da:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X;\ t \to C(t)x \text{ è derivabile due volte in } 0\},$$

$$Ax = C''(0)x.$$

E' possibile mostrare che $\mathcal{D}(A)$ è denso in X; inoltre $\exists\, M \in R^{+}$, $\omega \in R^{+} \cup \{0\}$, tali che

$$(5) \qquad \|C(t)\| \leq M \cosh(\omega t), \quad \forall\, t \in R .$$

Per le funzioni coseno vale il seguente risultato di generazione, analogo al Teorema di Hille-Yosida per i semigruppi.

<u>Teorema 1.</u> Un operatore lineare chiuso e con dominio denso A è generatore infinitesimale di una funzione coseno C, tale che $\|C(t)\| \leq M \cosh(\omega t)$, $\forall\, t \in R$, se e solo se:

i) $\exists\, \omega \in R^{+} \cup \{0\}$, tale che $z^{2} \in \rho(A)$, $\forall\, z \in C$, $\operatorname{Re} z > \omega$;

ii) $\left\| \frac{d^{n}}{dz^{n}} \left(z(A - z^{2})^{-1} \right) \right\| \leq \frac{1}{2} M \cdot n! \left((\operatorname{Re} z - \omega)^{-n-1} + (\operatorname{Re} z + \omega)^{-n-1} \right)$.

In tal caso,

$$z(z^{2} - A)^{-1}x = \int_{0}^{+\infty} e^{-zt}\, C(t)x\, dt,$$

$\forall\, z \in C$, $\operatorname{Re} z > \omega$ e $\forall\, x \in X$.

E' facile riconoscere che i seguenti operatori sono i generatori infinitesimali delle funzioni coseno sopra riportate.

<u>Esempio 1.</u> $-\alpha^{2}$ e α^{2}, rispettivamente.

Esempio 2. A (in entrambi i casi).

Esempio 3. B^2, se B è il generatore infinitesimale del gruppo.

Esempio 4. $(Af)(x) = f''(x)$ in ogni caso, con dominio, rispettivamente:

$$\mathcal{D}(A_1) = W^{P,2}(I) \cap W_0^{P,1}(I)$$

$$\mathcal{D}(A_2) = \{f \in C^{(2)}(R);\ f'' \text{ è limitata}\}$$

$$\mathcal{D}(A_3) = \{f \in C^{(2)}([a,b]);\ f(a) = f(b) = f''(a) = f''(b) = 0\}.$$

Poniamo $E = \{x \in X;\ t \to C(t)x$ è di classe $C^{(1)}\}$.

Allora se A è il generatore infinitesimale di C, $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in E$, la funzione

$$t \to C(t)x + S(t)y$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' = Au, \text{ in } R, \\ u(0) = x, \\ u'(0) = y. \end{cases}$$

Qualora lo spazio X sia di Hilbert e l'operatore A sia normale, Lutz (1977) ha provato che la sola condizione i) nel Teorema 1 è sufficiente ad assicurare che A sia il generatore di una funzione coseno.

Questo risultato si ottiene calcolando le derivate che compaio

no nella condizione ii) per mezzo della decomposizione spettrale di A.

Voglio infine far osservare che, se A è il generatore infinitesimale della funzione coseno C, A genera anche il semigruppo

$$T(t)x = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \exp(-s^2/(4t))C(s)x\, ds, \quad x \in X,$$

che è prolungabile analiticamente su Re t > 0.

2. RISULTATI DI PERTURBAZIONE

Il primo risultato di perturbazione fu ottenuto da E. Nagy (1974) per operazioni di perturbazione limitati.

Esso è la generalizzazione dell'analogo risultato di Phillips (1953) per i semigruppi:

Teorema 2. Sia A il generatore infinitesimale di una funzione coseno C; allora, se $B \in L(X)$, anche A + B è il generatore infinitesimale di una funzione coseno.

L'idea della dimostrazione è la seguente. Sia v una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'' = (A + B)v, & \text{in } R, \\ v(0) = x, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Allora,

$$d/(ds)(C(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s)) = -C'(t-s)v(s) +$$

$$+ S(t-s)v''(s) = - C'(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) + S(t-s)\, B\, v(s).$$

Poiché $S(t-s)A\, v(s) = A\, S(t-s)v(s) = d^2/(dt^2)(S(t-s)v(s)) = C'(t-s)v(s)$, risulta

$$d/(ds)(C(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s)) = S(t-s)\, B\, v(s) .$$

Integrando entrambi i membri di questa uguaglianza da 0 a t, si ottiene:

$$(6) \qquad v(t) = C(t)x + \int_0^t S(t-s)\, B\, v(s)\, ds.$$

Si risolve allora questa equazione integrale col metodo delle approssimazioni successive.

E' chiaro che analogamente si può ottenere l'equazione integrale

$$(7) \qquad w(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)\, B\, v(s) ds$$

soddisfatta da ogni soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} w'' = (A + B)w , & \text{in } R, \\ w(0) = 0, \\ w'(0) = y. \end{cases}$$

Se si vogliono risolvere equazioni integrali del tipo della (6) o della (7) con operatori B non limitati è allora chiaro che sarà ragionevole fare delle richieste sugli operatori B $C(t)$ o B $S(t)$.

Sulla base di questa idea Takenaka-Okazawa e Travis-Webb han

no ottenuto dei risultati di perturbazione per funzioni coseno simili a quelli che Phillips (1955) e Miyadera (1966) avevano ottenuto per i semigruppi.

Il risultato di Takenaka e Okazawa (1978), basato su informazioni su $B\,C(t)$ è il seguente.

Teorema 3. Sia A il generatore infinitesimale di una funzione coseno C, tale che $\|C(t)\| \leq M \cosh(wt)$, e sia B un operatore lineare, tale che:

i) $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$;

ii) $\exists\, \lambda_0 > w$, tale che $B\,R(\lambda_0^2; A) \in \mathcal{L}(X)$;

iii) $\exists\, K_0 \in R^+$, tale che

$$\int_0^1 \|B\,C(t)x\|\,dt \leq K_0\|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Allora, posto $K_\lambda = \sup\left\{ \int_0^1 e^{-\lambda t} \|B\,C(t)\|dt;\ x \in \mathcal{D}(A),\ \|x\| \leq 1 \right\}$,

con $\lambda \in R^+$, e $K_\infty = \lim_{\lambda \to +\infty} K_\lambda$, l'operatore $A + \varepsilon B$ è il generatore infinitesimale di una funzione coseno $\forall\, \varepsilon \in R^+$, $|\varepsilon| < K_\infty^{-1}$.

Un esempio di applicazione del risultato precedente è il seguente.

Siano $X = L^1(R)$ e A il generatore infinitesimale della funzione coseno di d'Alembert in X. Allora $\mathcal{D}(A) = W^{1,2}(R)$, $(Af)(x) = f''(x)$. Se $b \in L^1(R)$, $\mathcal{D}(B) = \{f \in L^1(R);\ bf \in L^1(R)\}$, $(Bf)(x) = b(x)f(x)$, risulta ovviamente

$$\int_0^1 \|B\,C(t)f\|_{L^1(R)}\,dt \leq \|b\|_{L^1(R)} \|f\|_{L^1(R)},$$

ma B non è limitato se $b \notin L^2(R) \cup L^\infty(R)$.

E' però evidente che con questo teorema non possono essere trattate, nella situazione ora esemplificata, perturbazioni contenenti un operatore di derivazione del primo ordine.

Servendosi invece di informazioni sul comportamento di B $\mathcal{S}(t)$, Travis e Webb (1981) hanno ottenuto il seguente risultato.

Teorema 4. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno e B un operatore lineare chiuso tale che:

i) $\bigcup_{t \in R} \mathcal{S}(t)(X) \subseteq \mathcal{D}(B)$;

ii) la funzione $t \to B\, \mathcal{S}(t)x$ sia continua $\forall x \in X$.

Allora A + B è il generatore infinitesimale di una funzione coseno.

Per la funzione coseno di d'Alembert risulta

$$\bigcup_{t \in R} \mathcal{S}(t)\ (X_1) \subseteq W^{p,1}(I),$$

$$\bigcup_{t \in R} \mathcal{S}(t)\ (X_2) \subseteq \{f \in C^{(1)}(R);\ f,\ f' \text{ limitate}\},$$

onde il risultato precedente è applicabile a operatori B del tipo

$$(Bf)(x) = b(x)\ f'(x) + c(x)\ f(x)$$

di dominio uno degli spazi a destra delle inclusioni precedenti, dove le funzioni b, $c \in L^{\infty}(I)$ nel primo caso, mentre sono continue e limitate nel secondo.

Successivamente al lavoro di Travis e Webb, Takenaka e Okazawa hanno migliorato il loro risultato così da ottenere una formulazione che contenesse anche quello di Travis e Webb. Questo nuovo risultato

è del tutto analogo al Teorema 3; è infatti sufficiente sostituire nelle ipotesi a B $C(t)$ l'operatore B $S(t)$.

Combinando gli esempi di perturbazione alla funzione coseno di d'Alembert presentati dopo i Teoremi 3 e 4 si possono ottenere esempi di applicazione di quest'ultimo risultato più generali dei precedenti.

Prima di illustrare un risultato molto recente dovuto a Watanabe, è necessario esporre alcune considerazioni preliminari.

Se muniamo il sottospazio vettoriale E della norma $\|x\|_E = \|x\| + \max_{[0,1]} \|C'(s)x\|$, esso diventa uno spazio di Banach. Evidentemente E è uno spazio intermedio fra X e $\mathcal{D}(A)$. E' quindi naturale chiedersi se E sia in qualche modo confrontabile con i domini delle potenze frazionarie di -A. In realtà, se A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno, non è detto che -A possegga potenze frazionarie; è però sempre possibile trovare $b \in R$, tale che $-(A-bI)$ sia un operatore positivo.

Rankin (1980) ha dimostrato, sotto opportune condizioni su A, che $E \subset \mathcal{D}((-A)^{\alpha})$, $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2}[$. Successivamente, Watanabe (1982) ha provato che se $-(A-bI)$ è un operatore positivo, allora

$$\mathcal{D}((-(A-bI))^{\beta}) \subset E \subset \mathcal{D}((-(A-bI))^{\alpha}), \tag{8}$$

algebricamente e topologicamente, $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ e $\forall \beta \in]\frac{1}{2}, 1]$.

Come ha mostrato Fattorini (1983) può essere $E \neq \mathcal{D}((-(A-bI))^{1/2})$. Infatti, se X è lo spazio di Banach delle funzioni continue in R che sono infinitesime all'infinito e C è la funzione coseno di d'Alembert, risulta:

$$E = \{f \in \mathcal{C}^{(1)}(R); \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} f'(x) = 0\},$$

mentre

$$((-A)^{1/2}f)(x) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon \leq s \leq \varepsilon^{-1}} (1/s)(u'(x+s) - u'(x-s))ds.$$

Pertanto $\mathcal{D}((-A)^{1/2}) \subset E$. Nel medesimo lavoro Fattorini ha però osservato che simili fenomeni patologici non si verificano se X è uno spazio L^p.

Ciò premesso, posso enunciare il risultato di Watanabe (1982).

Teorema 6. Se A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno e $B \in \mathcal{L}(E;X)$, allora anche $A + B$ è il generatore infinitesimale di una funzione coseno.

Questo risultato contiene, come caso particolare, quello di Travis e Webb. Infatti, poiché risulta $E = \{x \in X;\ \mathcal{S}(t)x \in \mathcal{D}(A),\ \forall t \in R$ e $t \to A\,\mathcal{S}(t)\,x$ è continua$\}$ e, poiché con opportune manipolazioni, si prova che, se $x \in E$, allora

$$u = \mathcal{S}(1)u - 2\int_0^1 \mathcal{S}(t/2)A\,\mathcal{S}(t/2)u\,dt,$$

dalle ipotesi di Travis e Webb segue che $u \in \mathcal{D}(B)$ e che $B \in \mathcal{L}(E;\ X)$.

Voglio infine segnalare un risultato di Lutz (1981) che permette di trattare perturbazioni dipendenti dal tempo.

Teorema 7. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno e $B : R \to \mathcal{L}(x)$ una funzione due volte fortemente derivabile con continuità. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' = Au + B(t)u\ , & \text{in } R\ , \\ u(o) = x \\ u'(o) = y \end{cases}$$

è uniformemente ben posto.

Un risultato analogo per i semigruppi era stato ottenuto da Phillips (1953).

BIBLIOGRAFIA

[1] H.O. FATTORINI: Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces I.,J. Differential Equations, 5 (1968), 72-105.

[2] id. : A Note on Fractional Derivatives of Semigroups and Cosine Functions, Pacific J. Math., 109 (1983), 335-347.

[3] J. KISYŃSKI: On Operator-Valued Solutions of d'Alembert's Functional Equation I, Coll. Math., 23 (1971), 107-114.

[4] D. LUTZ: Which Operators Generate Cosine Operator Functions?, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) 58 (1977), 314-317.

[5] id. : On Bounded Time-Dependent Perturbations of Operator Cosine Functions, Aequationes Math., 23 (1981), 197-203.

[6] I. MIYADERA: On Perturbation Theory for Semigroups of Operators, Tôhoku Math. J., 18 (1966), 299-310.

[7] B. NAGY: On Cosine Operator Functions in Banach Spaces, Acta Sci. Math.(Szeged), 36 (1974), 281-289.

[8] R.S. PHILLIPS: Perturbation Theory for Semi-Groups of Linear Operators, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 199-221.

[9] id. : Semi-Groups of Operators, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), 16-33.

[10] S.M. RANKIN III: A Remark on Cosine Families, Proc. Amer. Math. Soc., 79 (1980), 376-378.

[11] T. TAKENAKA-N. OKAZAWA: A Phillips-Miyadera Type Perturbation Theorem for Cosine Functions of Operators, Tôhoku Math. J., 30 (1978), 107-115.

[12] C.C. TRAVIS-G.F. WEBB: Perturbation of Strongly Continuous Cosine Family Generators, Coll. Math., 45 (1981), 276-285.

[13] M. WATANABE: A Perturbation Theory for Abstract Evolution Equations of Second Order, Proc. Japan Acad., Ser. A, 58 (1982), 143-146.